

Raumzeitsingularitäten

Die Theoreme von Penrose und Hawking

ROLAND STEINBAUER (UNIV. WIEN)

Laut Albert Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie manifestiert sich die Gravitation in der Geometrie der Raumzeit. Die Singularitätentheoreme von Roger Penrose und Stephen Hawking sind mathematische Sätze der Differentialgeometrie, die besagen, dass diese Raumzeitgeometrie unter physikalisch extremen aber plausiblen Bedingungen zusammenbricht und sogenannte Raumzeitsingularitäten entstehen. Genauer gilt das Theorem von Hawking als mathematische Evidenz für den Urknall, während das Theorem von Penrose — für das er den Nobelpreis für Physik im Jahr 2020 erhielt — das Auftreten einer Singularität im Inneren von Schwarzen Löchern vorhersagt. In diesem Beitrag unternehmen wir einen anschaulichen Spaziergang durch die Welt der Raumzeitgeometrien und der Schwarzen Löcher. Dabei erzählen wir die Geschichte der Singularitätentheoreme und lernen die Schlüsselidee aus Penroses „Nobelpreisarbeit“, den Begriff der gefangenen Fläche, kennen und erklären die Argumente, die hinter den Beweisen der Theoreme stecken. Schließlich stellen wir kurz die aktuellen Erweiterungen der Singularitätentheoreme für Raumzeiten niedriger Regularität vor.

General relativity is certainly a very beautiful theory, but how does one judge the elegance of physical theories generally?
ROGER PENROSE

1. Einleitung

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART), Albert Einsteins Theorie von Raum, Zeit, Materie und ihren Wechselwirkungen, deutet die Schwerkraft als eine Eigenschaft des umgebenden Raums. So fallen etwa Gegenstände nicht deswegen nach unten, weil sie von der Erde angezogen werden, sondern die Erde krümmt die Raumzeit und die Dinge folgen der Geometrie. Diese ungewohnte Verschiebung des Standpunkts und die essentielle Verwendung „gekrümmter Räume“, für die brauchbare Alltagsvorstellungen meist fehlen, hat der ART den Ruf einer notorisch schwierigen Theorie eingebracht. Tatsächlich wird auch die mathematische Sprache der ART, die (Lorentz-)Differentialgeometrie traditioneller Weise erst gegen Ende des Masterstudiums der Mathematik bzw. der Physik gelehrt. Nichtsdestotrotz ist es möglich, die Grundideen der ART in einer nicht-technischen Weise auf AHS-Niveau zu erklären, was wir in Abschnitt 2 tun wollen. Tatsächlich gibt es ausführliche Darstellungen, die dieses Ziel verfolgen, z. B. die Texte Natario (2011) und Kersting/Blair (2021), sowie das ganz neue Buch Carroll (2022), das einen etwas technischeren Anspruch hat und teilweise auch als Podcast Carroll (2022a) verfügbar ist. Und ein zeitloser Klassiker ist natürlich der populäre Text Einstein (2009) vom Schöpfer der Theorie höchstpersönlich.

Nachdem wir verstanden haben, was der Satz „Gravitation ist Raumzeitgeometrie“ bedeutet und einige Konsequenzen dieser Sichtweise diskutiert haben, wenden wir uns in Abschnitt 3 dem Begriff der Raumzeitsingularitäten zu. Unter einer Singularität versteht man ganz allgemein einen Punkt, an dem eine Größe — in der Physik etwa eine Massendichte oder Feldstärke — unbeschränkt (also „unendlich“) wird. Dementsprechend wäre eine Singularität in der ART ein Punkt, an dem die Krümmung unbeschränkt ist, und das ist auch die grobe, intuitive Idee einer Raumzeitsingularität. Allerdings ist die Sache im Detail etwas verzwickter und wir gehen kurz auf die Diskussion über die Natur von Singularitäten in der ART ein und besprechen theoretische und experimentelle Hinweise auf Raumzeitsingularitäten im Kontext des Gravitationskollapses von Sternen. Damit skizzieren wir den Stand der Forschung in den frühen 1960-er Jahren, bevor Roger Penrose auf den Plan trat. Sein berühmtes Singularitätentheorem, das unser Verständnis der ART beflügelt hat (siehe etwa Senovilla/Garfinkle (2015)), hat seinen Auftritt dann zu Beginn des Abschnitts 4, indem wir auch auf die zentralen Ideen hinter dem Theorem eingehen, insbesondere den Begriff der gefangenen Fläche. Wir besprechen ebenso das Singularitätentheorem

Ich danke den Organisatoren der Ostertagung für die Einladung zum Hauptvortrag und meinen Koautor*innen (siehe Abbildung 15) für ihre freundschaftliche Begleitung auf meiner Reise zu den Singularitätentheoremen.

von Stephen Hawking, das Penroses Ideen in der Kosmologie anwendet und so mathematische Evidenz für den Urknall liefert. Zum Schluss diskutieren wir noch die Erweiterungen der Singularitätentheoreme für Raumzeiten niedriger Regularität und spannen so den Bogen zu aktuellen Arbeiten unserer Wiener Forschungsgruppe.

2. Die Allgemeine Relativitätstheorie, ganz kurz gefasst

When forced to summarize the general theory of relativity in one sentence: Time and space and gravitation have no separate existence from matter. ALBERT EINSTEIN

Als die Geburtsstunde der ART gilt die Veröffentlichung ihrer Grundgleichungen im November 1915 durch ALBERT EINSTEIN (1879–1955), die heute seinen Namen tragen. Tatsächlich hatte Einstein nach seinem „Annus mirabilis“ 1905 in dem er unter anderem¹ die klassische Mechanik — die ja auf ISAAC NEWTON (1643–1727) und das 17. Jahrhundert zurückgeht — durch seine spezielle Relativitätstheorie (SRT) ersetzt hatte, zehn Jahre lang darum gerungen, die Gravitationskraft in seine Theorie einzubauen. Am Schluss wäre ihm dabei noch beinahe der wohl berühmteste Mathematiker seiner Zeit, DAVID HILBERT (1862–1943) zuvorgekommen, der an einem eng verwandten Problem arbeitete, siehe dazu auch die wissenschaftshistorische Literatur, etwa Corry et al. (1997).

Bis heute ist die ART die beste physikalische Beschreibung von Gravitation, Materie, Raum und Zeit im Großen. Ein besonderer Höhepunkt war die direkte Beobachtung von Gravitationswellen durch das LIGO-Interferometer (siehe Abbott et al. (2016)) im September 2015, also knapp vor dem 100. Geburtstag der Theorie. Dabei konnte Gravitationsstrahlung aufgezeichnet werden, die bei der Kollision zweier schwarzer Löcher, beide mit ca. der 30-fachen Masse unserer Sonne, in einer Entfernung von ca. 1.3 Milliarden Lichtjahren entstanden war, siehe auch Bieri et al. (2017). Für diesen Meilenstein der Gravitationsphysik, der auf spektakuläre Weise eine der zentralen Vorhersagen der ART bestätigte, erhielten die führend Wissenschaftler des über 1000-köpfigen Teams, RAINER WEISS, BARRY BARISH und KIP THORNE, den Nobelpreis im Jahr 2017 zugesprochen.

Wir beginnen unsere technische Beschreibung der ART mit der Feststellung, dass sie die Gravitation als Eigenschaft einer gekrümmten, vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit deutet. Etwas genauer besagt das, einem berühmten Zitat von JOHN A. WHEELER (1911–2008) (siehe (Misner et al., 1972, p. 5)) folgend:

Matter tells spacetime how to curve. (W1)

Spacetime tells matter how to move. (W2)

Um diese Aussagen zu erklären, müssen wir zuerst die Frage klären, warum die Gravitation überhaupt als Eigenschaft des Raumes aufgefasst werden kann, d.h. warum sie *geometrisch* ist.

2.1. Warum die Gravitation geometrisch ist

Die Tatsache, dass die Gravitation geometrisch beschrieben werden kann, folgt aus dem *Äquivalenzprinzip*, das auf GALLILEO GALILEI (1564–1642) und die Ursprünge der modernen, auf Experimenten aufbauenden Physik zurückgeht. Es lautet:

Alle Körper fallen gleich schnell.

Der Legende nach hat Galilei das durch Fallexperimente vom Schiefen Turm zu Pisa demonstriert: Ein Sack gefüllt mit Steinen und ein (gleichgroßer) Sack gefüllt mit Federn, die gleichzeitig von der Brüstung des Turms losgelassen werden, erreichen gleichzeitig den Boden, obwohl sie verschiedene Massen haben. Wesentlich ist nur, dass der Luftwiderstand auf beide Körper gleich wirkt, also in unserer Betrachtung keine Rolle spielt—eine einzelne Feder benötigt natürlich viel länger, um auf den Boden zu fallen. Eine spektakuläre Version dieses Experiment wurde von den Astronauten der NASA während der

¹ Bemerkenswerter Weise erhielt Einstein den Nobelpreis 1922 (rückwirkend für 1921) *nicht* für die Relativitätstheorie, sondern für seine Arbeit zum photoelektrischen Effekt aus dem Jahre 1905, einer der frühen Pionierleistungen der Quantenmechanik.

Apollo-15-Mission auf dem Mond durchgeführt, wo aufgrund des Fehlens einer Atmosphäre kein Luftwiderstand wirkt. Auf dem Video (Nasa, 1971) ist zu sehen, wie David Scott einen Hammer und eine Falkenfeder gleichzeitig fallen lässt und sie gleichzeitig auf dem Mondboden aufschlagen.

Das Äquivalenzprinzip lässt sich in der klassischen Mechanik ableiten, indem man das Gravitationsgesetz und das zweite Newtonsche Axiom heranzieht. Diese beiden Grundgleichungen der Newtonschen Mechanik lauten

$$F = G \frac{M m}{r^2} \quad \text{und} \quad F = m a, \quad (1)$$

wobei F die Kraft bezeichnet. Genauer ist im Gravitationsgesetz F die Kraft, die zwischen zwei Körpern der Massen M (sagen wir der Erde) und m (sagen wir, ein Sack Steine) wirkt, wobei $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ die Gravitationskonstante und r der Abstand zwischen den beiden Körpern ist. Mit dem zweiten Newtonschen Axiom können wir nun die Beschleunigung a ausrechnen, die auf den Sack Steine wirkt, nämlich

$$a = \frac{F}{m} = G \frac{M}{r^2} \quad (2)$$

und wir sehen, dass die Masse m in der Gleichung gar nicht auftritt. Daher ist die Beschleunigung eines Körpers unabhängig von seiner Masse, also ist sie für alle Körper gleich.

Wenn sie also in gleicher Weise auf alle Körper wirkt, also universell ist, dann können wir genauso gut die Schwerkraft als eine Eigenschaft des Raumes auffassen.

Um diese radikale Idee — die Einstein als seinen glücklichsten Gedanken bezeichnete — noch etwas zu motivieren, stellen wir einen Vergleich zwischen der Schwerkraft und elektromagnetischen Kräften an. Während erstere also auf alle Körper und auf diese gleich wirkt, wirkt die elektrische Kraft nur auf geladene Körper, nicht aber auf elektrisch neutrale und daher kann sie auch nicht als Eigenschaft des Raumes aufgefasst werden.

Es ist also diese *Universalität der Schwerkraft*, die Einstein ins Zentrum der ART stellt und damit das Äquivalenzprinzip von einer Folgerung in der klassischen Mechanik zu einem Eckstein seiner Theorie „befördert“. Wir können uns nun daran machen, die Bedeutung des ersten Teils des Wheeler-Zitats (W1) zu ergründen.

2.2. Matter tells spacetime how to curve

Diese Aussage spielt direkt auf die schon erwähnten Einstein-Gleichungen, also die Grundgleichungen der ART ab. Diese Verknüpfen die Geometrie der (vierdimensionalen) Raumzeit(-Mannigfaltigkeit) mit ihrem Materieninhalt. Genauer besagen sie, dass die Krümmung der Raumzeit proportional zu ihrem Masse- und Energieinhalt ist und lauten

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (3)$$

Hier stehen auf der linken Seite Terme, die von der Geometrie der Raumzeit, genauer von ihrer Krümmung her kommen. Auf der rechten Seite tritt, neben den Konstanten $8\pi G$ und der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300.000 \text{ km s}^{-1}$ der Energie-Impuls-Tensor T_{ik} auf, der alle in der Raumzeit vorhandenen Formen von Energie und Masse — die ja nach der wohl berühmtesten Formel von Einstein

$$E = m c^2 \quad (4)$$

ineinander umgewandelt werden können — kodiert.

Um die Einstein-Gleichungen etwas genauer zu verstehen, müssen wir uns etwas mit dem Begriff der *Krümmung* beschäftigen.

Exkurs: Was ist Krümmung?

Um eine Vorstellung von „Krümmung“ aufzubauen, beginnen wir mit dem Fall von Kurven. Eine Kurve ist dann gekrümmt, wenn sie nicht gerade ist, d.h. unter der Krümmung einer Kurve versteht man ihre Abweichung von einer Geraden. Um eine Vorstellung von „gekrümmten Räumen“ zu bekommen, betrachten wir als nächstes gekrümmte Flächen im dreidimensionalen Raum, siehe Abbildung 1. Diese nennen wir gekrümmt, wenn sie von der Ebene abweichen.

Solche gekrümmten Flächen sind an und für sich nichts Ungewöhnliches, denn wir alle leben auf einer! Die Oberfläche der Erde ist annähernd eine Kugel, also eine gekrümmte Fläche. Und wir alle kennen die Auswirkungen der Krümmung: Starten wir z. B. an einem beliebigen Punkt der Erde und bewegen uns immer in eine Richtung, dann kommen wir nach einiger Zeit zu diesem Punkt zurück². Eine weitere und für unsere Sache weit wichtigere Konsequenz der Krümmung ist ihre Auswirkung auf die *kürzesten Verbindungen* zwischen zwei Punkten. In der Ebene sind diese kürzesten Verbindungen Geraden. Auf gekrümmten Flächen gibt es keine Geraden, aber „möglichst gerade Kurven“, d.h. Kurven, die möglichst wenig von Geraden abweichen, also möglichst wenig gekrümmt sind. Auf der Kugel sind das die *Großkreise*, d.h. Kreise, die ihren Mittelpunkt im Kugelmittelpunkt haben und denselben Radius wie die Kugel selbst. Tatsächlich sind diese Großkreise lokal kürzeste Verbindungen zwischen Punkten. Starten wir etwa im Nordpol der Erdkugel, so sind die Großkreise gerade die Meridiane³, siehe Abbildung 2. Und diese sind zunächst tatsächlich die kürzesten Verbindungen zwischen dem Nordpol und jedem ihrer Punkte. Allerdings treffen alle diese kürzesten Verbindungen am Südpol zusammen und danach hören sie auf, kürzeste Verbindungen zu sein. Klar, denn nun ist es kürzer, vom Nordpol in die „andere Richtung“ zu starten und so nur dem kürzeren Großkreisbogen zu folgen. Z. B. ist die kürzeste Verbindung vom Nordpol in den Südatlantik der Null-Meridian, der über den Nordatlantik und dann Großbritannien, Westeuropa und Westafrika verläuft und nicht die Strecke, die zunächst entlang des 180-Grad Meridians über den Pazifik zum Südpol verläuft und dann längs des Nullmeridians in den Südatlantik.

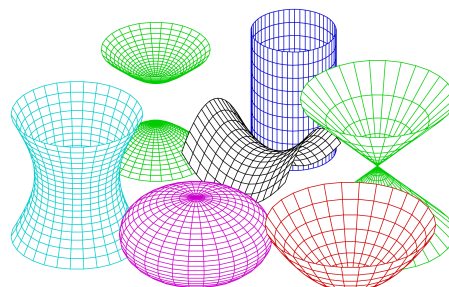


Abb. 1: Gekrümmte Flächen im Raum.

Wir haben also gelernt, dass auf gekrümmten Flächen lokal kürzeste Verbindungen möglichst gerade Linien sind. Diese Kurven werden *Geodäten* genannt und, um etwas formaler zu werden, bezeichnen wir sie mit $\gamma : I \rightarrow M$ wobei I ein (beliebiges) Intervall in \mathbb{R} ist und M die gekrümmte Fläche bezeichnet. Geodäten sind dadurch charakterisiert, dass ihr Geschwindigkeitsvektor $v(t) = \dot{\gamma}(t)$ parallel längs der Kurve transportiert wird — eine Eigenschaft, die sie offensichtlich mit Geraden $\gamma(t) = x_0 + vt$ gemeinsam haben, deren Geschwindigkeitsvektor v sich überhaupt nicht ändert. Nun ist es ein wesentlicher Effekt der Krümmung, dass sich Geodäten schneiden können und danach aufhören, kürzeste Verbindungen zu sein.

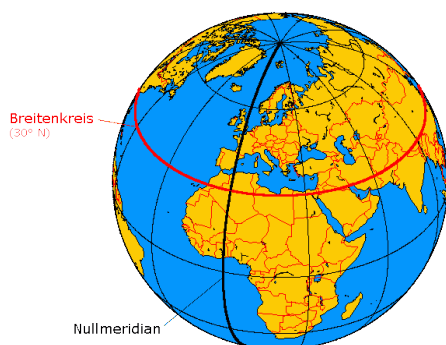


Abb. 2: Meridiane als Großkreise.

Original uploader Daniel FR at German Wikipedia, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons

Die bisher besprochene Geometrie der gekrümmten Flächen im Raum war schon CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) bekannt, aber ihre abstrakte Verallgemeinerung, die moderne *Differentialgeometrie*, ver-

² Diese Tatsache war zwar im antiken Griechenland bekannt — tatsächlich konnte ERATOSTHENES VON KYRENE (276/273–194 v.U.Z.) den Erdradius auf einige Prozent genau bestimmen — wurde aber im Europäischen Mittelalter vergessen und erst durch die Weltumsegelung von FERNÃO DE MAGALHÃES (1480–1521) und JUAN SEBASTIÁN ELCANO (1486/87–1526), die vor genau 500 Jahren endete, „bestätigt“.

³ Die Breitenkreise — mit der Ausnahme des Äquators — sind keine Großkreise, sondern stärker gekrümmt.

danken wir seinem Schüler BERNHARD RIEMANN (1826–1866). Um den Krümmungsbegriff etwas zu erklären — was nach wie vor unser Ziel ist — müssen wir in die Anfangsgründe dieser *Riemann-Geometrie* eintauchen. Wir beginnen zunächst mit der Frage, welche Begriffe wir brauchen, um „richtig Geometrie betreiben“ zu können. Eigentlich sind dafür nur zwei Zutaten nötig, nämlich *Längen* und *Winkel*. Haben wir diese beiden Begriffe zur Verfügung, so können wir alle geometrischen Konstruktionen durchführen, die uns nur einfallen! Der entscheidende nächste Schritt ist es zu fragen, in welchen möglichst einfachen Begriff wir diese beiden Zutaten am besten „verpacken“ können. Dabei hilft uns die Erinnerung an eine einfache Formel zur Berechnung von *Skalarprodukten* zweier Vektoren v und w , nämlich

$$\langle v, w \rangle \equiv v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos(\alpha), \quad (5)$$

wobei $\| \cdot \|$ die Länge (Norm) der jeweiligen Vektoren bezeichnet und α der von v und w eingeschlossene Winkel ist. Wir sehen also, dass ein Skalarprodukt alles ist, was wir brauchen!

Um also das Wesen einer gekrümmten Fläche erfassen und auf ihr Geometrie betreiben zu können, brauchen wir ein Skalarprodukt — und zwar am besten in jedem Punkt der Fläche ein anderes, das die jeweilige „lokale Geometrie“ in der Nähe des Punktes bestimmt. Denn diese soll ja, wo die Fläche von der Ebene abweicht, in spezifischer Weise von der ebenen Geometrie abweichen. Dabei verwenden wir jetzt den Begriff Skalarprodukt in einer etwas allgemeineren Bedeutung (als das Standardskalarprodukt in der Ebene \mathbb{R}^2), nämlich für Abbildungen g_x die aus zwei Vektoren v und w am Punkt x eine Zahl $g_x(v, w)$ macht und dabei bilinear ($g_x(v_1 + \lambda v_2, w) = g_x(v_1, w) + \lambda g_x(v_2, w)$) und analog für den zweiten Eintrag) und symmetrisch ($g_x(v, w) = g_x(w, v)$) sind und zusätzlich *nicht-degeneriert*, d.h.

$$g_x(v, w) = 0 \text{ für alle } w \text{ impliziert } v = 0. \quad (6)$$

Als letzten Baustein machen wir noch die Beobachtung, dass die Gleichung (5) und die nachfolgende Diskussion in jeder Dimension funktioniert: Im Schulunterricht wird sie für Vektoren v und w in der Ebene \mathbb{R}^2 behandelt, sie gilt aber auch im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 und ebenso im vierdimensionalen Raum⁴ \mathbb{R}^4 . Wir können nun eine informelle Definition einer *Raumzeit-Mannigfaltigkeit* geben. Wir verstehen darunter eine vierdimensionale „Fläche“ M , für die in jedem Punkt $x \in M$ ein Skalarprodukt g_x gegeben ist, und das Skalarprodukt g_x glatt (d.h. besonders schön im Sinne von beliebig oft differenzierbar) vom Punkt x abhängt. Die Punkte x in M , die ja vier Komponenten haben — also etwa $x = (t, x_1, x_2, x_3)$, wobei t für die Zeitkoordinate steht und x_i für die Raumkoordinaten — nennen wir auch Ereignisse, und die Raumzeit ist dann die Menge aller Ereignisse. Das mathematische Teilgebiet, in dem die Geometrie von Raumzeit-Mannigfaltigkeiten erforscht wird heißt *Lorentz-Geometrie*, benannt nach dem niederländischen theoretischen Physiker HENDRIK ANTOON LORENTZ (1853–1928).

Als nächstes kommen wir auf das wesentliche Objekt der Riemann-Geometrie zu sprechen, den *Krümmungstensor*. Dieser fasst alle zweidimensionalen Krümmungen, über die wir oben gesprochen haben, zu einem einzigen Objekt in der vierdimensionalen Raumzeit zusammen. Naturgemäß ist ein Objekt, in dem soviel Information kodiert ist, kompliziert und seine formale Definition

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (7)$$

spiegelt das wieder. Hier sind X, Y und Z Vektoren⁵ und ∇_X bzw. ∇_Y (sogenannte kovariante) Richtungsableitungen in Richtung von X bzw. Y . Nun kodiert $R(X, Y)$ die Krümmung in der von X und Y aufgespannten Ebene indem es die Vertauschung von Richtungsableitungen zweiter Ordnung nach X und Y (in ihrer Wirkung auf den dritten Vektor Z) „misst“. Das ist die „infinitesimale Version“ des folgenden Effekts der Krümmung: Kehren wir noch einmal auf die Kugeloberfläche zurück und betrachten wir einen Vektor v , im „Westpol“ also dem Schnittpunkt der Nullmeridians mit den Äquator⁶, der genau nach Norden zeigt. Nun transportieren wir v längs des Äquators parallel⁷ nach Osten, bis wir den

⁴ Die Tatsache, dass wir uns den vierdimensionalen — oder noch schlimmer den allgemeinen n -dimensionalen — Raum nicht vorstellen können stellt für das konkrete Rechnen überhaupt kein Problem dar. Im \mathbb{R}^4 hat man nur doppelt soviel Arbeit wie im \mathbb{R}^2 — muss man doch mit Vektoren mit vier statt mit zwei Komponenten arbeiten!

⁵ Etwas genauer sind X, Y und Z Vektorfelder, d.h. Abbildungen, die Punkten x von M Vektoren $X(x), Y(x)$ und $Z(x)$ in x zuordnen.

⁶ Diese Punkt liegt im Atlantik südlich von Westafrika, siehe Abbildung 2.

⁷ Das bedeutet wir halten den Winkel zwischen v und dem Geschwindigkeitsvektor der Kurve — also des Äquators — konstant.

180-Grad-Meridian erreichen. Der mittransportierte Vektor zeigt nun noch immer nach Norden. Jetzt bewegen wir uns entlang des 180-Grad-Meridians nach Norden bis zum Pol und dann längs des Nullmeridians zurück unserem Ausgangspunkt. Dabei transportieren wir unseren Vektor weiterhin parallel, d.h. er bleibt tangential zu unserer Kurve, dem Großkreisbogen bestehend aus den „oberen Hälften“ des 180-Grad Meridians und des Nullmeridians. Am Ende unserer Reise im „Westpol“ zeigt der mittransportierte Vektor daher nach Süden! Wir stellen also fest, dass der Vektor v nach seinem Paralleltransport längs der geschlossenen Kurve *nicht* als er selbst zurückkehrt, sondern als $-v$. Infinitesimal lässt sich diese Diskrepanz eines „Startvektors“ und des „Endvektors“ nach Paralleltransport längs einer geschlossenen Kurve mittels (Nicht-)Vertauschens von Richtungsableitungen ausdrücken und durch den Krümmungstensor quantitativ beschreiben — für eine technische Ausarbeitung dieses Arguments siehe z. B. (Kunzinger/Steinbauer, 2021, Bem. 3.1.8).

Die Einsteingleichungen

Nachdem wir uns ein Bild vom Begriff der Krümmung gemacht haben, ist es unser nächstes Ziel, die Einsteingleichungen plausibel zu machen. Dazu benötigen wir einen weiteren Baustein aus der Riemann-Geometrie, nämlich eine quantitative Version des oben schon angesprochenen Effekts, den die Krümmung auf Geodäten hat. Tatsächlich gibt die Krümmung die relative Beschleunigung „benachbarter“ Geodäten in Bezug auf eine „Referenzgeodäte“ γ an, siehe Abbildung 3. Genauer wird diese durch die sogenannten *Deviationsgleichung*

$$\ddot{X} = R(\dot{\gamma}, X) X \quad (8)$$

bestimmt, wobei der Deviationsvektor $X(t)$ den Normalabstand von $\gamma(t)$ zu Punkten auf „Nachbargeodäten“ beschreibt.

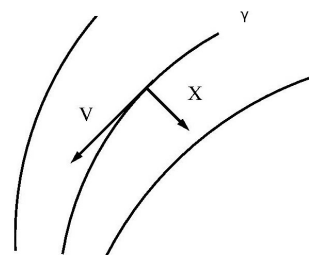


Abb. 3: Geodätische Deviation.

Um nun endlich zu den Einsteingleichungen zu kommen, betrachten wir die analoge Situation in der klassischen Newtonschen Mechanik. Dort bezeichnet man die Kraft, die die relative Beschleunigung frei fallender Körper verursacht, als *Gezeitenkraft*: Fallen zwei Körper, sagen wir wieder vom Schiefen Turm von Pisa, wobei wir sie gleichzeitig an nahe beieinander liegenden Stellen über die Brüstung werfen, so kommen sie einander geringfügig näher (obwohl sie natürlich gleich schnell fallen). Klar, denn sie fallen ja beide in Richtung Erdmittelpunkt. Die entsprechende Kraft ergibt sich in der Newtonschen Mechanik zu

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = 2 \frac{GM}{r^3} x, \quad (9)$$

wobei x den Abstand(svektor) zwischen benachbarten Körpern bezeichnet und r seine Länge. Vergleichen wir diese Gleichung mit Gleichung (8), die die analoge Situation in der Riemann-Geometrie beschreibt, so fällt auf, dass den einander entsprechenden Größen \ddot{x} und \ddot{X} jeweils sehr verschiedene rechte Seiten gegenüberstehen: einmal ist es der Term $2GMx/r^3$, der die Newtonsche Gezeitenkraft aufgrund einer vorhandenen Masse M angibt, das andere mal der Krümmungsterm $R(\dot{\gamma}, X)X$. Die entscheidende Idee ist es nun, diese beide Seiten als einander entsprechende Analoga in Newtonmechanik und ART anzusehen, also

$$R(\dot{\gamma}, X) X \sim 2 \frac{GM}{r^3} x. \quad (10)$$

Verfolgt man diesen Ansatz konsequent weiter, indem man den Krümmungsterm auf der linken Seite geeignet umformt und den Massenterm auf der rechten Seite in geeigneter Weise verallgemeinert, so erhält man tatsächlich die Einsteingleichungen⁸

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (3)$$

⁸ Wobei für die Indizes $i, k = 0, 1, 2, 3$ gilt, weil man traditioneller Weise in der ART die Zeitkoordinate mit dem Index 0 bezeichnet, also $(t, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ schreibt.

Dabei stehen nun auf der linken Seite (neben den Komponenten der Metrik g_{ik}) geeignete Terme, die aus dem Krümmungstensor abgeleitet werden, nämlich die Komponenten des *Ricci-Tensors* R_{ik} und die *Skalar Krümmung* R . Auf der rechten Seite stehen neben Konstanten eben die Komponenten des *Energie-Impuls-Tensors* T_{ik} , der alle Formen von Masse und Energie beinhaltet.

Zusammenfassend können wir also feststellen, dass im Einklang mit (W1) die Materie die Raumzeit krümmt: Jede Form von Masse bzw. Energie beeinflusst über (3) die Krümmung der Raumzeit (M, g) und bei gegebenem T_{ik} können wir daraus die Metrik g , also die lokale Geometrie der vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit, ausrechnen.

2.3. Spacetime tells matter how to move

Wir kommen nun zum Schluss unseres Ausflugs in die Grundlagen der ART zum zweiten Wheeler-Zitat (W2). Dieses spielt darauf an, wie die Geometrie der Raumzeit die kräftefreie Bewegung von kleinen Teilchen ohne innere Struktur bestimmt. Solche bezeichnet man als *Testteilchen* oder *Beobachter* und wir müssen hier eine wichtige Gegebenheit erklären, die wir bisher verschwiegen haben. Die Metrik der ART ist, wie schon oben angeklungen, kein „gewöhnliches“ Skalarprodukt, sondern es gibt in jedem Punkt eine symmetrische Bilinearform, die im Sinne von (6) nicht-degeneriert ist. Diese Bedingung ist schwächer als das die übliche positive Definitheit⁹ und macht es möglich, dass Vektoren ein negatives Skalarprodukt $g_x(v, v)$ haben können! Tatsächlich ist das notwendig, damit die ART kompatibel mit der SRT ist, diese also erweitert. So ist auch die einfachste Raumzeit der ART der *Minkowskiraum* (\mathbb{R}^4, η) , der in mathematisch eleganter Weise die SRT formalisiert: Alle ihre bekannten, spektakulären Effekte wie Längenkontraktion und Zeitdilatation (siehe (Einstein, 2009, §8–§10)) können präzise mittels der Metrik η ausgedrückt werden. Dabei ist diese Metrik $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ gar nicht vom Punkt x abhängig und der Minkowskiraum ist *flach*, also nicht gekrümmt. Aber schon η erlaubt (und das ist essentiell!) negative und verschwindende Skalarprodukte von Vektoren, z. B. für $v = (1, 0, 0, 0)$ gilt $\eta(v, v) = -1$ und für $w = (1, 1, 0, 0)$ gilt (noch schlimmer!) $\eta(w, w) = 0$; solche Vektoren werden *zeitartig* bzw. *lichtartig* genannt, während Vektoren mit positiven Skalarprodukt (langweilig!) *raumartig* heißen. Man spricht in diesem Zusammenhang vom kausalen Charakter eines Vektors.

Es ist ein fundamentales Prinzip der ART, dass ihre Geometrie lokal der Geometrie des Minkowskiraums entspricht¹⁰ und daher ergibt sich auch für Vektoren v in einem Punkt x einer Raumzeit (M, g) dieselbe Klassifikation in Termen des Vorzeichens von g_x , genauer nennen wir v mit

$$g_x(v, v) \begin{cases} < 0 & \text{zeitartig} \\ = 0 & \text{lichtartig oder null} \\ > 0 & \text{raumartig.} \end{cases} \quad (11)$$

Außerdem nennen wir Vektoren *kausal*, wenn sie zeitartig oder null sind. Alle Nullvektoren liegen auf einem Doppelkegel mit Spitze im Ursprung, der *Lichtkegel* genannt wird, siehe Abbildung 4. Zeitartigen Vektoren liegen innerhalb des Lichtkegels und raumartige außerhalb.

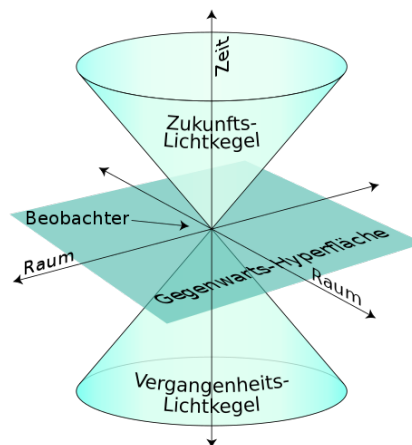


Abb. 4: Lichtkegel.

Dt. Version: Bernhardius bei de.wikipedia / Original SVG: K. Aainsqatsi at en.wikipedia, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

Zusätzlich ist in einer Raumzeit in jedem Punkt die Zeitrichtung festgelegt, d.h. der Lichtkegel zerfällt in den Zukunfts- und den Vergangenheitslichtkegel — in Abbildung 4 der obere bzw. untere Teil des

⁹ Ein Skalarprodukt η heißt positiv definit, falls $\eta(v, v) \geq 0$ und $\eta(v, v) = 0$ nur für den Vektor $v = 0$ gilt.

¹⁰ Das bedeutet, dass wir für jeden Punkt x in der Raumzeit (M, g) Koordinaten finden können, sodass in diesen Koordinaten $g_x = \eta$ gilt.

Doppelkegels. Kurven γ in der Raumzeit können nun ebenfalls klassifiziert werden und zwar entsprechend dem kausalen Charakter ihres Geschwindigkeitsvektors $\dot{\gamma}$ und seiner Zeitrichtung. Das Studium von kausalen Kurven und der Mengen, die sie von einem Punkt aus erreichen können — also das Studium von Zukunft und Vergangenheit von Punkten — ist der Ausgangspunkt der *Kausalitätstheorie*, einem wichtigen Teil der Lorentz-Geometrie.

Kommen wir nun zurück zur Bewegung von Testteilchen. Materieteilchen bewegen sich auf (zukunftsgerichteten) zeitartigen Kurven, weil sie schon laut SRT die Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen oder überschreiten können. Lichtteilchen hingegen bewegen sich auf lichtartigen Kurven. Findet diese Bewegung kräftefrei statt, so folgt sie nach einem weiteren Grundprinzip der ART Geodäten. Genauer bewegen sich kräftefreie Materieteilchen auf *zeitartigen Geodäten* und man nennt sie auch oft (inertiale) Beobachter. Wir können uns solche Beobachter im astrophysikalischen Kontext durchaus als Astronauten in antriebslosen Raumschiffen vorstellen. Licht hingegen bewegt sich auf *Nullgeodäten* durch die Raumzeit.

Nun ist es an der Zeit, ein weiteres Element der Riemann-Geometrie zu präzisieren, nämlich die explizite Beschreibung von Geodäten. Wir haben schon besprochen, dass Geodäten Kurven γ in der Raumzeit (M, g) sind, deren Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\gamma}$ parallel längs der Kurve transportiert werden. Das bedeutet, dass sich $\dot{\gamma}$ im Sinne der Geometrie der Raumzeit nicht ändert, also für seine der Geometrie angepasste Richtungsableitung in Richtung seiner selbst $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ gilt. Formuliert man diese Gleichung nach den Regeln der Riemann-Geometrie in Termen der Koordinaten γ^i der Kurve $\gamma: I \rightarrow M$, so erhält man die *Geodätengleichung*

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0. \tag{12}$$

Hier sind Γ^i_{jk} die sogenannten *Christoffelsymbole*, in denen die Geometrie der Raumzeit steckt, da sie aus der Metrik und ihren Ableitungen nach der Regel $\Gamma^i_{jk} = (1/2)g^{il}(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk})$ gebildet werden. Außerdem haben wir die sogenannten Einsteinsche Summenkonvention verwendet, die besagt, dass über Indizes, die in einer Formel einmal als obere und einmal als untere Indizes vorkommen, zu summieren ist¹¹.

Als nächstes betrachten wir die Geodätengleichung (12) als Differentialgleichung. Tatsächlich handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ($\ddot{\gamma}$ tritt auf), die aber (und das ist entscheidend!) *nichtlinear* ist ($\dot{\gamma}$ tritt quadratisch auf). Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen sagt uns daher zur Lösbarkeit von (12) das Folgende: Wenn wir einen Anfangspunkt $x \in M$ wählen und eine Anfangsgeschwindigkeit, repräsentiert durch einen Vektor v in x , dann gibt es eine eindeutige Lösung γ mit diesen Anfangsdaten. Genauer gibt ein Intervall I mit $0 \in I$ und eine eindeutige Lösung $\gamma: I \rightarrow M$ der Geodätengleichung (12) mit $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Etwas anschaulicher gesprochen startet in jedem Punkt der Raumzeit in jede Richtung genau eine Geodäte, siehe Abbildung 5.

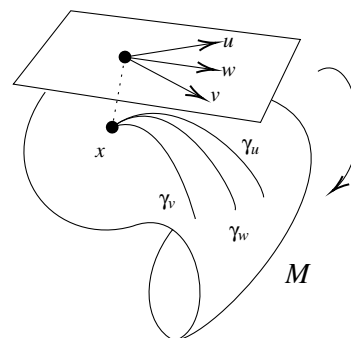


Abb. 5: In jedem Punkt x startet in jede Richtung (hier etwa u, v, w) genau eine Geodäte (bezeichnet mit $\gamma_u, \gamma_v, \gamma_w$).

Jetzt kommt aber noch ein wesentlicher Punkt ins Spiel, nämlich die Nichtlinearität der Gleichung. Wegen dieser sind die Lösungen der Geodätengleichung im allgemeinen nämlich nicht global! D.h. es kann vorkommen, dass das Lösungsintervall I , auf dem eine Geodäte maximal definiert ist, beschränkt (und offen) ist, d.h. genauer, dass z. B. die Weltlinie eines Beobachters nicht beliebig lange (also für alle Zeiten) fortgesetzt werden kann, sondern nach endlicher Zeit endet. Das ist natürlich kein schöner Effekt und wir betrachten Mannigfaltigkeiten auf denen alle Geodäten beliebig lange fortgesetzt werden können (also global

¹¹ Z.B. gilt also $g^{il} \partial_k g_{lj} = \sum_{i=0}^3 g^{il} \partial_k g_{lj}$.

sind) als besonders schön und nennen sie (*geodätisch*) *vollständig*. Ein Beispiel dafür wäre wiederum die Kugel, denn die Großkreise sind geschlossene Kurven und so können wir beliebig lange herum und wieder herumlaufen — bis in alle Ewigkeit. Ein zugegebenermaßen etwas künstliches Beispiel für Nichtvollständigkeit wäre der gewöhnliche \mathbb{R}^2 , bei dem allerdings gemeinerweise der Nullpunkt herausgeschnitten wurde. Hier sind die Geodäten gerade die Geraden und manche von ihnen „fallen“ in das „Loch“ im Nullpunkt und enden dort. Solche unvollständigen Geodäten werden uns im Kontext von Raumzeitsingularitäten — denen wir uns im nächsten Abschnitt nähern wollen — noch ausgiebig beschäftigen. Zuvor können wir aber zufrieden feststellen, dass wir nun auch das zweite Wheeler-Zitat (W2) mit einer genaueren Vorstellung verbunden haben und beenden damit unseren Rundgang durch die Fundamente der ART.

3. Raumzeitsingularitäten

The universe does not behave according to our pre-conceived ideas. It continues to surprise us.
STEPHEN HAWKING

Wir beginnen unsere Diskussion mit einem weiteren Blick auf die Einsteingleichungen, die Grundgleichungen der ART (3), und mit der Frage, wie man Lösungen dieser Gleichungen findet. Um das am Ende von Abschnitt 2.2 Diskutierte etwas zu vertiefen, sei gesagt, dass die Einsteingleichungen vom mathematischen Standpunkt aus gesehen sehr kompliziert sind — sie bilden ein System von 10 gekoppelten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Das bedeutet, dass es bei gegebener sogar einfacher rechter Seite, also bei gegebener Energie-Impuls-Verteilung, schwierig ist, die Metrik „auszurechnen“ und damit die entsprechende Geometrie zu bestimmen. Tatsächlich wurde in den ersten Jahrzehnten ihres Bestehens die ART als rein geometrische Theorie gesehen und ein großer Zoo an expliziten Lösungen hergeleitet und seine physikalischen Eigenschaften studiert. Dieser Zweig der ART — *Exakte Lösungen* genannt, siehe etwa Griffiths/Podolský (2009) — wurde erst ab der Mitte des 20. Jahrhunderts durch stärker *analytische Techniken* ergänzt, die sich mit prinzipiellen Fragen der Lösbarkeit der Einsteingleichungen befassen. Ein früher Meilenstein ist dabei das lokale Existenzresultat von YVONNE CHOQUET-BRUHAT (Fourès-Bruhat, 1952). In den letzten Jahrzehnten hat dieser analytische Zugang innerhalb der ART mehr und mehr an Gewicht gewonnen und es konnten mathematisch beeindruckende Existenz- und Stabilitätsresultate für Lösungen der Einsteingleichungen erzielt werden, siehe z. B. Ringström (2015). In den letzten 25 Jahren haben in der ART auch *numerische Techniken* immer mehr an Bedeutung gewonnen, siehe z. B. Baumgarte/Shapiro (2010). Schließlich war es auch eine Kombination aus analytischen und numerischen Methoden, die den theoretischen Hintergrund für die erste direkte Beobachtung von Gravitationswellen (siehe Abschnitt 2) lieferten.

3.1. Die Schwarzschildlösung

Kommen wir aber zurück zu den exakten Lösungen und ihren Anfängen. Schon im Jahre 1916 fand der deutsche Physiker KARL SCHWARZSCHILD (1873–1916) — übrigens während eines Fronturlaubs im 1. Weltkrieg — die erste nicht-triviale¹² Lösung der Einsteingleichungen. Sie beschreibt die Raumzeitgeometrie außerhalb einer (nichtrotierenden) Kugel der Masse M und hat die folgende Gestalt

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (13)$$

wobei $d\Omega^2$ die gewöhnliche¹³ Metrik auf der zweidimensionalen Kugel ist, die in Kugelkoordinaten θ und φ die Form $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$ hat. Die beiden anderen Koordinaten t und r bezeichnen die Zeit bzw. den Abstand vom Kugelmittelpunkt, also den Radius. Wir folgen hier der üblichen Konvention, statt der Metrik als Matrix das sogenannte Linienelement ds^2 anzugeben, das sich aus den Koeffizienten g_{jk}

¹² Als triviale Lösung verstehen wir hier den Minkowskiraum — dessen Stabilität als Lösung der Einsteingleichungen wurde übrigens erst 1993 von DEMETRIOS CHRISTODOULOU und SERGIU KLAINERMAN auf mehreren hundert Seiten bewiesen. Soviel zur Trivialität.

¹³ Damit ist jene Metrik gemeint, die man erhält, wenn man die übliche Metrik des umgebenden \mathbb{R}^3 auf die Kugel einschränkt.

einer Metrik g gemäß $ds^2 = g_{jk}dx^j dx^k$ ergibt. Vergleichen wir diese Metrik mit der des Minkowskiraums, die in diesen Koordinaten die Form

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (14)$$

annimmt, so sehen wir, dass bei fixierter Masse M die Schwarzschildmetrik (13) für große r der Minkowskimetrik nahe kommt, weil $2M/r$ klein wird. Für kleine Radien weicht die Schwarzschild-Geometrie aber deutlich vom flachen Minkowskiraum ab, da t - und r -Komponente deutlich von 1 abweichen. Wir können die Schwarzschild-Geometrie in einem zweidimensionalen Bild veranschaulichen, indem wir die Krümmung in der (t, r) -Ebene darstellen, siehe Abbildung 6. Auch hier sehen wir, dass die Geometrie „außen“, d.h. für große Radien annähernd flach ist und „innen“ einen Trichter formt. Nimmt man an, die Kugel wäre unsere Sonne, dann können wir uns die Planetenbahnen als annähernde Kreisbahnen im trichterförmig durch die Sonne gekrümmten Raum vorstellen — also etwa wie Kugeln in einem Rouletterad.

So weit, so gut, allerdings sehen wir, dass die Schwarzschildmetrik (13) beim Radius $r = 2M$ ein „Problem“ hat: Dort wird der t -Koeffizient 0 und sein Kehrwert, der r -Koeffizient ist nicht definiert, genauer geht er für $r \searrow 2M$ gegen ∞ und wir sprechen von einer „Singularität“.

An dieser Stelle wollen wir diesen Begriff „Singularität“ etwas genauer erklären. Ganz allgemein verstehen Mathematiker*innen unter einer Singularität einen (isolierten) Punkt mit einem ungewöhnlichem Verhalten. Dieser Terminus ist also ähnlich unbestimmt, wie etwa „trivial“ und er kann ganz vieles bedeuten. In der Fachsprache der Physiker*innen wird unter Singularität etwas spezifischer ein Punkt verstanden, an dem eine physikalische Größe divergiert, also „unendlich wird“. Wir haben oben gesehen, dass in der Schwarzschildmetrik ein Koeffizient für $r \searrow 2M$ divergiert und es stellen sich nun zwei Fragen:

- (1) Ist diese Singularität überhaupt ein Problem für unsere Theorie bzw. unser Modell — in diesem Fall das Gravitationsfeld eines Sterns?
- (2) Handelt es sich bei dieser Divergenz der Metrik — also einer geometrischen Größe — auch um eine physikalische Singularität, bei der eine physikalische Größe divergiert?

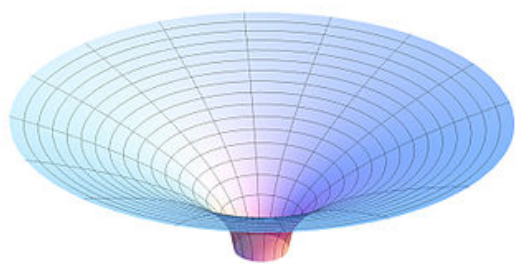


Abb. 6: Veranschaulichung der Schwarzschild-geometrie.

Mrmw, CC0, via Wikimedia Commons

	Radius	r_s
Sonne	700000 km	3 km
Erde	6300 km	9 mm
Käsesemmel	10 cm	10^{-26} cm

Tabelle 1: Schwarzschildradius — einige Beispiele.

Um die erste Frage zu bearbeiten, also um zu sehen, ob wir die Schwarzschildsingularität überhaupt ernst nehmen müssen, setzen wir zunächst die physikalischen Einheiten — die wir bisher weggelassen haben — ein. Damit ergibt sich für den kritischen Wert des Radius, genannt *Schwarzschildradius*

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (15)$$

Tabelle 1 zeigt den Schwarzschildradius für einige (annähernd) kugelförmige Massen und suggeriert die Antwort: Nein! Die entsprechenden Schwarzschildradien sind weit innerhalb der Massen und dort können wir ohnehin nicht erwarten, dass die Schwarzschildlösung gültig ist — sie beschreibt ja nur die Raumkrümmung *außerhalb* der Masse, also dort, wo für den Energie-Impuls-Tensor $T_{ik} = 0$ gilt und nicht innerhalb, wo ja eine Masse M vorhanden und daher $T_{ik} \neq 0$ ist.

3.2. Theoretische Hinweise auf den Gravitationskollaps

Ganz so einfach können wir es uns aber leider doch nicht machen, aber das macht die ganze Sache erst interessant. Mit den Jahren tauchten zunächst theoretische Hinweise auf, dass die Schwarzschildsingularität doch ein Problem sein könnte. Zunächst leitete der Indisch-US-amerikanische Physiker SUBRAMANYAN CHANDRASEKHAR (1910–95) im Jahre 1930 aus quantentheoretischen Überlegungen die nach ihm benannte Grenze her: Jeder Stern fällt nach dem Erlöschen seiner Kernfusionsprozesse unter seiner eigenen Gravitation in sich zusammen und bildet einen Weißen Zwerg. Ist allerdings die Masse des Sterns über der Chandrasekhar-Grenze von ca. 1.4-mal der Masse unserer Sonne, dann reicht der Druck des Elektronengases im Weißen Zwerg nicht aus, um ihn zu stabilisieren und er stürzt weiter in sich zusammen, und er könnte so den Schwarzschildradius unterschreiten¹⁴. Chandrasekhar erhielt für diese Entdeckung im Jahr 1983 den Nobelpreis für Physik — übrigens vor dem Nobelpreis für Penrose die längste „Wartezeit“.

Einen weiteren theoretischen Hinweis, die Frage (1) nicht auf die leichte Schulter zu nehmen, lieferte 1939 eine Arbeit von ROBERT OPPENHEIMER¹⁵ (1906–67) und HARTLAND SNYDER (1910–62). Die beiden „klebten“ innen an die eine Schwarzschild-Außenraumlösung einen Stern, dessen Materie sie als druckfreien Staub modellierten und konnten so zeigen, dass in der entsprechenden Lösung der Einsteingleichungen der Stern über seinen Schwarzschildradius hinaus weiter kontrahiert wird.

Zusammenfassend gab es also seit den 1930-er Jahren theoretische Hinweise, die Singularität am Schwarzschildradius ernstzunehmen. Daher ist es an der Zeit — noch bevor wir auch experimentelle, also astrophysikalische Hinweise besprechen — uns mit Frage (2) zu beschäftigen, damit wir also wissen, was uns genau bei $r = r_s$ erwartet.

3.3. Die wahre Bedeutung des Schwarzschildradius

Die Frage (2) war schon suggestiv in die Richtung formuliert, dass eine Singularität in der Metrik nicht unbedingt eine physikalische Singularität zur Folge haben muss. Tatsächlich stellte sich vor allem durch Arbeiten von MARTIN KRUSKAL (1925–2006), der wie seine beiden Brüder US-Mathematiker und Physiker war, aber hauptsächlich zur Plasmaphysik arbeitete, und des Ungarisch-Australischen Kombinatorikers GEORGE SZEKERES (1911–2005) heraus, dass die Singularität in der Metrik (13) nur ein Problem schlecht gewählter Koordinaten war und es Koordinatensysteme gibt, in denen die Metrik auch zu Radien kleiner r_s fortgesetzt werden kann. Gleichbedeutend damit ist, dass die Krümmung der Raumzeit bei $r = r_s$ keinerlei problematisches Verhalten zeigt, sondern „brav“ bleibt.

Betrachtet man die sogenannte Kruskal-Erweiterung der Schwarzschildmetrik, so stellt man fest, dass die dreidimensionale Fläche $r = r_s$ eben keine Singularität ist, sondern ein sogenannter *Ereignishorizont*. Das bedeutet, dass wenn ein Beobachter oder Lichtstrahl diese Fläche von außen kommend überquert, dann kann er nie wieder zurück in den Außenraum gelangen — er ist also innerhalb des Schwarzschildradius gefangen! Und es kommt noch schlimmer, denn in der Kruskal-Raumzeit kommt man noch in einer anderen Weise vom Regen in die Traufe. Zwar ist die Singularität bei $r = r_s$ als physikalisch unbedenklich entlarvt aber bei $r \searrow 0$ divergiert die Krümmung und es liegt eine „echte“ Singularität vor. Und unsere Beobachter oder Lichtstrahlen, wenn sie den Horizont erst einmal überschritten haben, „fallen“ unweigerlich in die Krümmungssingularität bei $r = 0$. Vermutlich der erste Physiker, der dieses Phänomen im Jahr 1958 richtig erfasste war DAVID FINKELSTEIN (1929–2016), den heute gebräuchlichen Begriff *Schwarzes Loch* prägte der schon erwähnte John Wheeler allerdings erst im Jahre 1967. Er beschreibt in einem klaren Bild die Idee einer Region der Raumzeit mit so starker Gravitation, dass nicht einmal Licht daraus entweichen kann.

¹⁴ Tatsächlich wissen wir heute, dass je nach Masse ein Kollaps zum Neutronenstern oder zum schwarzen Loch erfolgt.

¹⁵ Besser bekannt für seine Rolle als wissenschaftlicher Leiter des Manhattan-Projekts, dem US-amerikanischen Kernwaffenprogramm im 2. Weltkrieg.

Dieses Szenario, also das theoretische Bild vom Gravitationskollaps, veranschaulichen Physiker*innen heutzutage am liebsten an einem sogenannten Penrose-Carter-Diagramm¹⁶ für die Kruskal-Erweiterung der Schwarzschildmetrik, siehe Abbildung 7. In dieser zweidimensionalen Veranschaulichung bewegen sich Lichtstrahlen auf 45°-Linien. Die schraffierte Fläche bezeichnet den von einem kollabierenden Stern eingenommenen Teil der Raumzeit, dessen Radius in der Zukunft gegen 0 geht. Der Ereignishorizont ist die obere 45°-Linie und es ist optisch klar, dass nichts, das sich mit maximal Lichtgeschwindigkeit bewegt — also auf einer Linie steiler als 45° — von einem Punkt „hinter“ dem Horizont ins „Unendliche“ (mit \mathcal{J}^+ bezeichnet) gelangen kann — soll heißen in den Raum weit weg vom Stern. Stattdessen endet jede solche Weltlinie eines Beobachters oder Lichtstrahls in der Singularität bei $r = 0$, die als strichlierte Linie dargestellt ist.

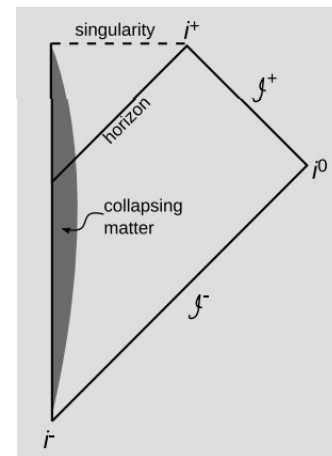


Abb. 7: Standardbild des Gravitationskollaps.

3.4. Raumzeitsingularitäten ernst genommen

Unser Ziel ist es nun endgültig, die Situation zu skizzieren, in der sich die ART in Bezug auf Raumzeitsingularitäten um die Mitte der 1960-er Jahre befand und wir beginnen mit astrophysikalischer Evidenz für das Vorhandensein massiver, dichter Objekte im Universum, die potentiell unter ihren Schwarzschildradius kontrahiert sind.

Der Radioastronom und Nobelpreisträger des Jahres 1974, MARTIN RYLE (1918–84), entdeckte 1959 den ersten Quasar mit der Kennung 3C 273. Mit dieser Abkürzung für „quasi stellar radio source“ werden astrophysikalische Objekte bezeichnet, die im sichtbaren Bereich nahezu punktförmig (also wie ein Stern) erscheinen, aber in anderen Wellenlängenbereichen sehr große Energiemengen ausstrahlen. Der niederländische Astronom MAARTEN SCHMIDT (1928–2022) konnte bald darauf mittels Spektralanalyse feststellen, dass 3C 273 kein naher Stern ist, sondern 2.4 Milliarden Lichtjahre entfernt, also im Bereich ferner Galaxien liegt. Außerdem „leuchtet“ 3C 273 ca. 300 mal heller als die gesamte Milchstraße und konzentriert 890 Millionen Sonnenmassen in einer Raumregion von der Größe unseres Sonnensystems, woraus sich abschätzen lässt, dass dieses Objekt unterhalb seines Schwarzschildradius kontrahiert sein muss.

Zusammengefasst gab es in den früheren 1960-er Jahren das folgende Bild: Es gab zwar theoretische Evidenz für das Auftreten von Raumzeitsingularitäten in/und Schwarzen Löchern, diese hatte allerdings den Schwachpunkt, dass sie auf verhältnismäßig einfachen Modellen beruhte. Die Schwarzschildmetrik hat sehr hohe (nämlich Kugel-) Symmetrie und der Oppenheimer-Snyder Kollaps verwendet zusätzlich ein sehr einfaches Materiemodell. Deswegen meldeten vor allem die führenden sowjetischen Physiker¹⁷ EVGENY LIFSHITZ (1915–85) und ISAAK KHALATNIKOV (1919–2021) große Zweifel an, bzw. behaupteten, dass diese Arten von Singularitäten nur theoretische Artefakte zu einfacher Modelle wären. Denn auch das Newtonsche Modell einer kollabierenden exakt kugelförmigen Schale aus Staub führt zu einer Singularität — die Massendichte im Zentrum divergiert. Ohne perfekte Symmetrie geht hier aber alles gut, da sich die Staubteilchen nicht alle gleichzeitig im Mittelpunkt treffen.

Andererseits war die oben erwähnte astrophysikalische Evidenz so stark, dass führende theoretische Physiker über den Zustand der Theorie besorgt waren. In dieser Situation ermutigte John Wheeler — schon wieder! — seinen jungen britischen Kollegen ROGER PENROSE, sich des Problems anzunehmen. Eine lohnende Quelle dazu ist das ausführliche Interview mit Penrose (University of Oxford, 2014), in

¹⁶ Der australische Physiker BRANDON CARTER entwickelte diese Form von Diagrammen unabhängig von Roger Penrose etwa zur selben Zeit in den frühen 1960-er Jahren.

¹⁷ Beide waren ukrainisch-jüdischer Herkunft, geboren in Kharkiv bzw. Dnipro und sind vor allem für die gemeinsam mit dem russisch-italienischen Physiker VLADIMIR BELINSKI entwickelte BKL-Vermutung über das generische Verhalten von Lösungen der Einstein-Gleichungen in der Nähe kosmologischer Singularitäten bekannt.

dem er auch den Moment beschreibt, in dem ihm die entscheidende Idee zu seinem Theorem bewusst wurde — beim Überqueren einer Straßenkreuzung. Um dieses Theorem geht es im nächsten Abschnitt.

4. Die Singularitätentheoreme

Do not be afraid to skip equations (I do this frequently myself).

ROGER PENROSE

In diesem Abschnitt stellen wir die klassischen Singularitätentheoreme der ART vor — die allgemein als einer *der* Meilensteine der mathematischen Physik im 20. Jahrhundert gelten — und beginnen mit dem historisch ersten, dem von Roger Penrose. Dieses garantiert die Existenz von Raumzeitsingularitäten im Fall des vollständigen Gravitationskollapses eines massiven Objekts, also etwa eines massereichen Sterns. Danach behandeln wir das „kosmologische“ Singularitätentheorem von STEPHEN HAWKING (1942–2018), das eine starke mathematische Evidenz für eine „Anfangssingularität“ im Universum liefert. Zum Abschluss diskutieren wir ein paar aktuelle Entwicklungen rund um diese Theoreme.

4.1. Das Penrose-Theorem: Singularitäten in schwarzen Löchern

Wie im vorigen Abschnitt erklärt, begann Roger Penrose seine Untersuchungen in einem Umfeld, in dem zwar astrophysikalische Evidenz für die Existenz von Objekten, die unter ihren Schwarzschildradius kontrahiert sind, vorhanden war, aber bezweifelt wurde, ob die ART in diesem Fall auch abseits von unrealistisch symmetrischen Modellen eine Singularität vorhersagt. Penrose konnte aber genau das mit seinem Theorem beweisen. Genauer gesagt konnte er in seinem „Nobelpreis-Paper“ (Penrose, 1965) zeigen, dass ein starkes Gravitationsfeld, wie es etwa im Inneren der Schwarzschildmetrik herrscht, unter physikalisch sinnvollen Voraussetzungen *immer* eine Singularität erzeugt — ganz unabhängig von jeder Symmetriebedingung. Allgemeiner formuliert besagt das Theorem also, dass Raumzeitsingularitäten generische Phänomene in der ART sind.

Wie oben erklärt, war dieses Resultat *nicht* erwartet worden und überraschte die Community. Außerdem kann das Penrose-Theorem, das 50 Jahre nach der Geburt der ART bewiesen wurde, als erster echter post-Einsteinscher Beitrag zur Theorie gesehen werden — in dem Sinne, dass es nicht vom Erfinder der Theorie vorhergesehen worden war, vgl. (Senovilla, 2012, Abschn. 15.1). Ungeachtet seiner Kürze von etwas mehr als $2\frac{1}{2}$ Seiten beinhaltete es nicht weniger als 3 revolutionäre Aspekte:

- (1) Penrose gründete seinen Beweis auf globale Methoden der Differentialgeometrie, die vorher in der ART nicht verwendet worden waren.
- (2) Im Einklang mit diesen Methoden definierte er Singularitäten durch unvollständige kausale Geodäten, vgl. Abschnitt 2.3. Zwar formulierte Penrose diese Definition nicht explizit und sie wurde erst unter dem Einfluss von Stephen Hawking zur Standarddefinition (vgl. Landsman (2021)), aber sie prägt die Art und Weise, wie wir heute in der ART über Singularitäten denken:

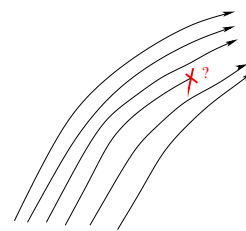


Abb. 8: Eine unvollständige kausale Geodäte als Singularität.

Definition 4.1 *Eine Raumzeit heißt singularär, wenn sie eine unvollständige kausale Geodäte enthält.*

Diese Definition ist nicht nur eine klare geometrische Bedingung, sie ist auch intuitiv gut verständlich, siehe Abbildung 8: Eine unvollständige kausale Geodäte entspricht einem Beobachter oder einem Lichtstrahl, dessen Existenz plötzlich endet. Eine solche Situation ist physikalisch sogar noch weniger akzeptabel als ein Divergieren der Krümmung. Gewissermaßen ist kausale geodätische Vollständigkeit eine Minimalvoraussetzung um eine Raumzeit als „frei von Singularitäten“ einzustufen.

- (3) Penrose findet einen Weg, die Idee eines Raumzeitbereichs mit so starker Gravitation, dass nicht einmal Licht entkommen kann, in einen mathematischen Begriff zu gießen — und zwar allgemein,

d.h. losgelöst von einer exakten Lösung wie etwa in Abschnitt 3.3. Der entsprechende Begriff einer *gefangenen Fläche* nimmt seither eine zentrale Rolle in der ART ein und wir werden ihn im folgenden erklären.

Beginnen wir mit einer zweidimensionalen geschlossenen raumartigen Fläche S in der Raumzeit. Geschlossen bedeutet hier kompakt (also abgeschlossen und beschränkt) und ohne Rand — wir können etwa an die Oberfläche eines Sterns denken. Von so einer Fläche gehen immer zwei Scharen von Lichtstrahlen aus, die rechtwinklig auf die Fläche stehen: Lichtstrahlen, die normal nach Außen gehen (bezeichnet mit dem Nullvektor k_+) und solche, die normal nach Innen (also in Richtung des Zentrums des Sterns) gehen (bezeichnet mit dem Nullvektor k_-). Unserer Anschauung lässt uns denken, dass die erste Schar von „auslaufenden“ Nullgeodäten divergieren, also immer größere Wellenflächen bilden und die zweite Schar der „einlaufenden“ Nullgeodäten immer kleinere. Tatsächlich ist das in Regionen mit schwacher Gravitation so, siehe Abbildungen 9 und 10, wo wir eine Dimension unterdrückt haben. Hier ist S also als eindimensionale geschlossene „Fläche“ dargestellt, damit wir die beiden Scharen von Nullgeodäten gut sichtbar einzeichnen können.

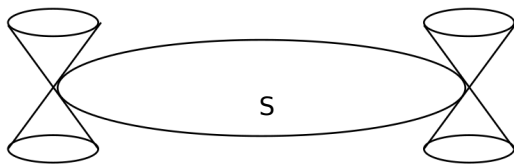


Abb. 9: Schwache Gravitation: Licht kann nach Innen und Außen laufen.

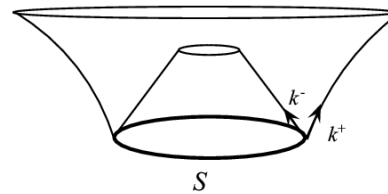


Abb. 10: Die nach Außen laufende Lichtfront hat eine wachsende Fläche.

Die Lichtkegel stehen in etwa senkrecht auf S (Abbildung 9), die einlaufende Wellenfront k_- schreitet zu kleineren Flächen fort, die auslaufende k_+ zu grösseren (Abbildung 10).

Ist allerdings die Gravitation nahe S „so stark, dass nicht einmal Licht entkommen kann“, dann werden beide Scharen von Nullgeodäten zu kleineren Flächen fortschreiten. Tatsächlich sind dann die Lichtkegel so weit nach innen gekippt, siehe Abbildung 11, dass sogar die auslaufenden Nullgeodäten k_+ eine Lichtfront erzeugen, die zu kleineren Flächen fortschreitet, siehe Abbildung 12. In diesem Fall nennen wir S eine *gefangene Fläche*.

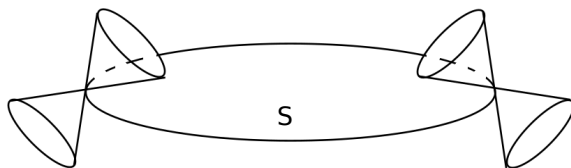


Abb. 11: Starke Gravitation: Licht kann nur nach Innen laufen.

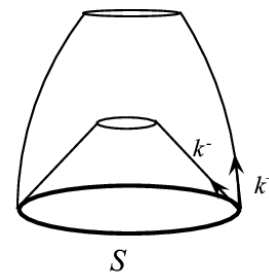


Abb. 12: Starke Gravitation: Beide Lichtfronten haben eine schrumpfende Fläche.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das „Nobelpreis-Theorem“ von Roger Penrose formulieren:

Theorem 4.2 (Penrose, 1965) *Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:*

- (1) *Es gibt eine gefangene Fläche.*
- (2) *Es gilt die Null-Energiebedingung.*
- (3) *Es gibt eine nicht-kompakte Cauchyfläche.*

Dann ist sie singulär.

Wir sehen also, dass das Vorhandensein einer gefangenen Fläche eine essentielle Annahmen im Theorem ist. Die weiteren Voraussetzungen bedeuten im Wesentlichen, dass die Gravitation anziehend wirkt (Bedingung (2)), was immer der Fall ist, wenn die Einsteingleichungen (3) gelten und der Energie-Impuls-Tensor einigermaßen „vernünftig“ ist. Schließlich besagt die dritte Bedingung, dass wir ein abgeschlossenes System betrachten, also etwa einen isolierten Stern, in dessen Nähe sich keine weiteren nennenswerten Massen befinden.

Die Aussage des Theorems lässt sich nun wie folgt zusammenfassen: Entsteht beim Gravitationskollaps eines Sterns eine gefangene Fläche und ist die Raumzeit sonst „vernünftig“, dann entsteht generisch — also ohne Annahme irgendeiner Symmetrie oder eines speziellen Modells — eine Raumzeitsingularität im Sinne der Existenz einer unvollständigen kausalen Geodäte.

4.2. Das Hawking-Theorem: Anfangssingularität im expandierenden Universum

Wir kommen nun zum zweiten klassischen Singularitätentheorem. Kurz nachdem er einen Vortrag von Penrose über sein Theorem gehört hatte, erkannte Stephen Hawking, dass essentiell dieselben Argumente auch im Falle eines überall expandierenden Universum gültig sind. Das Teilgebiet der Physik, das sich mit dem Universum als ganzem beschäftigt, heißt *Kosmologie*. Und in der relativistischen Kosmologie war die Situation bzgl. Raumzeitsingularitäten in den 1960-er Jahren ähnlich wie im Fall des Gravitationskollapses. Viele Modelle eines expandierenden Universums zeigen eine „Anfangssingularität“ in der Vergangenheit, die als *Urknall* bezeichnet und als Beginn des Universums interpretiert wird. Allerdings haben diese Modelle ebenfalls einen hohen Grad an Symmetrie und es stellt sich wieder die Frage, ob diese Singularitäten generisch sind oder nur ein Artefakt der Symmetrien. Das Hawking-Theorem zeigt, dass ersteres der Fall ist.

Genauer gesagt legte Stephen Hawking in den Jahren 1965–67 eine fünfteilige Publikationsserie vor (siehe (Hawking/Ellis, 1973, Kap. 8)), in der er nicht nur mehrere Varianten seines Singularitätentheorems bewies, sondern neben der Anwendung der Penrose-Ideen und Methoden in der Kosmologie auch weitere wesentliche differentialgeometrische Techniken erstmals in der ART verwendete. In einer etwas vereinfachten Form können wir das Theorem wie folgt formulieren:

Theorem 4.3 (Hawking, 1966) *Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:*

- (1) *Es gibt eine dreidimensionale Fläche mit positiver Expansion.*
- (2) *Es gilt die starke Energiebedingung.*
- (3) *Es gibt eine kompakte Cauchyfläche.*

Dann ist sie singulär.

Tatsächlich sind diese Bedingungen jenen im Penrose-Theorem sehr ähnlich bzw. analog. Bedingung (2) stellt ebenfalls sicher, dass die Gravitation anziehend wirkt und Bedingung (3) besagt im Wesentlichen, dass wir es mit einem kosmologischen Modell zu tun haben. Schließlich bedeutet Bedingung (1), dass das Universum zu einem Zeitpunkt — repräsentiert durch die dreidimensionale Fläche — überall expandiert. In dieser Situation gibt es, wie das Theorem nachweist, immer eine unvollständige zeitartige und vergangenheitsgerichtete Geodäte und wir können seinen Inhalt etwas leger zusammenfassen: Ein expandierendes Universum hat in der Vergangenheit eine Singularität, die wir als Urknall interpretieren können.

4.3. Das Muster der Theoreme & ihrer Beweise

Gegen Ende der 1960-er Jahre waren es neben Penrose und Hawking vor allem ROBERT GEROCH und GEORGE ELLIS, die mit einer Fülle von weiteren Resultaten dazu beitrugen die Theorie der Singularitätentheoreme abzurunden, für einige Details dazu siehe (Senovilla/Garfinkle, 2015, Abschn. 5). Bemerkenswerter Weise bewiesen Penrose und Hawking in ihrer einzigen gemeinsamen Arbeit Hawking/Penrose (1970) das raffinierteste der klassischen Singularitätentheoreme. Dieses Hawking-Penrose Theorem fasst alle diesbezüglichen Entwicklungen zusammen und beweist die meisten der zuvor gefundenen

Resultate unter weit schwächeren Bedingungen — nota bene mit stärkeren und verfeinerten Methoden. Wir wollen hier aber zunächst nicht dieses technisch aufwendige Resultat besprechen, sondern das Gemeinsame hinter den Theorem aufdecken und kurz die zugrundeliegende Beweisidee transparent machen.

Dabei beginnen wir mit einem „Mustertheorem“ das Senovilla (1998) dazu verwendet, die verschiedenen Voraussetzungen und Folgerungen der einzelnen Varianten der Singularitätentheoreme zu vergleichen.

Theorem 4.4 (Singularitäten-Mustertheorem) *Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:*

- (1) *Ein geeignete Anfangsbedingung.*
- (2) *Eine Energie- oder Krümmungs-Bedingung.*
- (3) *Eine geeignete Kausalitätsbedingung.*

Dann ist sie singular.

Beginnen wir mit einer Diskussion der drei Voraussetzungen. Bedingung (1) ist eine Anfangsbedingung, die etwas vereinfacht aussagt, dass es eine Region in der Raumzeit mit starker Gravitation gibt. Die Energie- oder Krümmungsbedingung besagt, dass in der gesamten Raumzeit die Gravitation anziehend wirkt und Bedingung (3) betrifft schließlich die globale Struktur der Raumzeit. Mit diesen Erklärungen ausgestattet, können wir uns an eine Beweisskizze wagen!

Beweisskizze:

Die Anfangsbedingung (1) führt dazu, dass kausale Geodäten zu fokussieren beginnen, d.h. sie beginnen aufeinander zuzulaufen, siehe schwarzer Teil der Geodäten in Abbildung 13. Aufgrund der Energiebedingung (2) geht diese Fokussierung weiter, siehe blauer Teil der Geodäten in Abbildung 13. Dieser Teil des Argument verwendet die sogenannte Raychaudhuri-Gleichung und wir werden ihn unten noch etwas genauer erklären. Jedenfalls führt diese fortgesetzte Fokussierung dazu, dass sogenannte fokale Punkte entstehen. Das sind (beinahe¹⁸) Berührungspunkte von Geodäten und wie wir in Abschnitt 2.2 besprochen haben, hören die Geodäten danach auf, längste¹⁹ Verbindungen zu sein. Schließlich kommt die globale Bedingung (3) in Spiel, die die Existenz längster Geodäten garantiert und daher das Entstehen von fokalen Punkten verbietet. Daher bleibt den kausalen Geodäten kein anderer Ausweg, als vor dem fokalen Punkt ihre Existenz zu beenden, dargestellt durch die roten Kreuze in Abbildung 13. Damit sind sie aber unvollständig und die Raumzeit ist nach Definition 4.1 singular. □

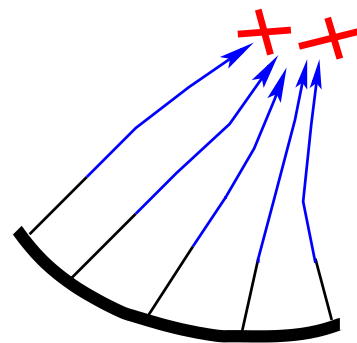


Abb. 13: Beweisschema: Fokussierung kausaler Geodäten.

Das analytische Herz aller Singularitätentheoreme ist das in obiger Beweisskizze prominent auftauchende Fokussierungsargument und dieses wollen wir zum Abschluss des Abschnitts noch etwas genauer erläutern. Dazu betrachten wir eine Schar von „benachbarten Geodäten“²⁰ rund um eine „Referenzgeodäte“ γ (rot in Abbildung 14) und die sogenannte Expansion θ . Sie misst die Größe der Fläche (schwarz in Abbildung 14), die die Geodätenschar „rund um γ “ hat und ihr zeitlicher Verlauf ist durch die Raychaudhuri-Gleichung

$$\dot{\theta}(t) = -\text{Ric}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) - \text{tr}(\sigma^2(t)) - \frac{1}{3} \theta^2(t) \tag{16}$$

bestimmt. Hier tritt wieder unser alter Bekannter, der Ricci-Tensor Ric auf, der schon im Krümmungsterm der Einsteingleichungen (3) die tragende Rolle gespielt hat. Die Größe σ ist die sogenannte Sche-

¹⁸ Für unsere Zwecke können wir dieses „beinahe“ rundweg ignorieren!

¹⁹ Da wir es hier mit kausalen Geodäten in einer Raumzeit zu tun haben, wo ja für den Geschwindigkeitsvektor $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \leq 0$ gilt, dreht sich im Vergleich zu den Großkreisen auf der Kugel ein Vorzeichen um, sodass diese Geodäten längste und nicht kürzeste Verbindungen sind.

²⁰ Der Fachterminus ist geodätische Kongruenz, siehe etwa (Hawking/Ellis, 1973, p. 99).

rung der Geodätenschar und an ihr interessiert uns nur, dass sie quadratisch eingeht und daher der Spur-Term (bezeichnet mit tr für das Englische „trace“) größer-gleich 0 ist. An dieser Stelle tritt nun die Energiebedingung (2) auf den Plan. Sie lautet $\text{Ric}(v, v) \geq 0$ für alle kausalen Vektoren v und daher ist auch der Krümmungsterm in der Raychaudhuri-Gleichung (16) nicht-negativ. Jetzt müssen wir nurmehr feststellen, dass vor beiden gerade besprochenen Termen ein Minus steht, um zur Differentialgleichung

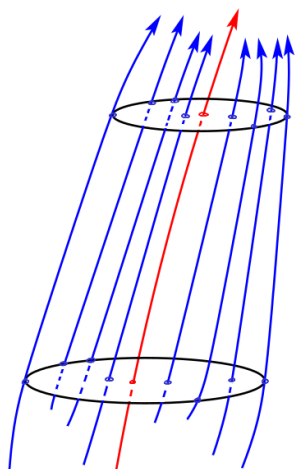


Abb. 14: Die Expansion θ längs einer Geodätenschar.

$$\dot{\theta}(t) \leq -\frac{1}{3}\theta^2(t) \quad (17)$$

zu gelangen. Als nächstes verwenden wir eine in der Riemann-Geometrie weitverbreitete Technik, die Vergleichsmethode — man spricht auch von *Vergleichsgeometrie*: Wir betrachten die Differentialgleichung, die wir aus (17) bekommen, also $\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{3}\theta^2(t)$ und vergleichen Ihre Lösungen mit den Lösungen von (17). Bei gleicher Anfangsbedingung ist klar, dass die uns interessierenden Lösungen von (17) immer kleiner-gleich den Lösungen der Differentialgleichung sein müssen. Und diese — das ist der Trick — können wir leicht berechnen. Dazu schreiben wir die Gleichung leicht um zu

$$\frac{d}{dt}(\theta^{-1}) = -\frac{\dot{\theta}}{\theta^2} = \frac{1}{3} \quad (18)$$

und wir sehen, dass $\theta^{-1}(t) = (1/3)t + \theta_0^{-1}$ die Lösung mit der Anfangsbedingung $\theta^{-1}(0) = \theta_0^{-1}$ ist. Nun ist es eine Konsequenz aus der Anfangsbedingung (1), dass die Expansion zum Anfangszeitpunkt θ_0 negativ ist, was wiederum zur Folge hat, dass unsere Lösung für θ^{-1} für t gegen $-3/\theta_0 =: t_0$ eine Nullstelle hat (beachte, dass wegen $\theta_0 < 0$ der „kritische“ Zeitpunkt t_0 in der Zukunft vom Anfangszeitpunkt $t = 0$ liegt, d.h. $t_0 > 0$ gilt). Wenn aber θ^{-1} bei t_0 eine Nullstelle erreicht, dann muss θ für $t \nearrow t_0$ gegen $-\infty$ gehen (minus, wieder weil $\theta_0 < 0$!), was nichts anderes bedeutet, als dass die Fläche kollabiert und ein konjugierter Punkt entsteht.

Jetzt kehren wir zurück zu der uns eigentlich interessierenden Differentialgleichung (17) und stellen fest, dass hier ein konjugierter Punkt schon früher auftreten muss — „unser echtes“ θ ist ja noch kleiner als das soeben besprochene und es gibt also einen konjugierten Punkt schon zu einem früheren Zeitpunkt t , d.h. bei einem t mit $t < t_0 = -3/\theta_0$. Wir haben also im Detail gesehen, dass Anfangsbedingung (1) und die Energiebedingung (2) gemeinsam dazu führen, dass benachbarte kausale Geodäten fokussieren und einen (beinahe) Berührungspunkt entwickeln. Danach hören sie auf, längste Verbindungen zu sein. Und um das Argument von Ende der Beweisskizze am Schluss dieses Abschnitts zu wiederholen: Diese Tatsache spießt sich mit (den Konsequenzen) der globalen Bedingung (3) — falls nicht (zumindest) eine Geodäte zu existieren aufhört, bevor sie ihren konjugierten Punkt erreicht. Das wiederum impliziert, dass die Raumzeit singular ist.

4.4. Weiterentwicklungen: Singularitätentheoreme in niedriger Regularität

Zum Abschluss unserer Reise zu den Singularitätentheoremen skizzieren wir noch eine Entwicklung der letzten paar Jahre. Diese hat mit der sogenannten Frage der Regularität in den Theoremen zu tun. Tatsächlich haben diese eine etwas stillschweigende Voraussetzung, die wir nur kurz besprochen haben: die Raumzeitmetrik g muss *glatt* sein, d.h. die Skalarprodukte g_x müssen sich in besonders schöner Art und Weise verändern, wenn wir den Punkt x in der Raumzeit M variieren — genauer müssen sie beliebig oft differenzierbar vom Punkt abhängen. Eine Inspektion der Beweise der Singularitätentheoreme zeigt, dass zwar alles auch für zweimal stetig-differenzierbare, sogenannte C^2 -Metriken funktioniert, darunter aber die verwendeten Methoden der Riemann-Geometrie völlig zusammenbrechen! Das bedeutet einerseits, dass die Theoreme z. B. gar nicht auf die motivierenden Modelle wie den Oppenheimer-Snyder Kollaps²¹ aus Abschnitt 3.2 anwendbar sind. Andererseits ergibt sich aus dem folgenden Grund, den

²¹ Das erwähnte „Verkleben“ des Schwarzschild-Außenraums mit dem inneren Sternmodell führt zu niedriger Regularität.

schon (Hawking/Ellis, 1973, Abschn. 8.2) beschrieben haben, ein noch gravierendes Problem: Der Widerspruch, der in den Beweisen der Theoreme zur Unvollständigkeit kausaler Geodäten (und damit auf Singularitäten) führt, könnte auch dadurch aufgelöst werden, dass die Regularität der Metrik unter die Schranke von C^2 sinkt. Wäre nun die Metrik von sehr niedriger Regularität — etwa nur stetig — dann ergibt sich kein Problem. Zwar würde keine Singularität im Sinne von Unvollständigkeit durch die Theoreme vorhergesagt, aber eine solche Metrik würde auf eine unbeschränkte Krümmung führen, was natürlich im Sinne der Physik — vergleiche auch unsere Diskussion in Abschnitt 3.1 — ebenfalls eine Singularität wäre. Anders, falls die Metrik nur knapp unter C^2 fällt, etwa stetig differenzierbar mit (lokal) Lipschitz-stetiger²² Ableitung (mit $C^{1,1}$ bezeichnet) ist. Dann kann man aus der Metrik noch die Krümmung ausrechnen und diese ist zwar nicht mehr stetig, aber noch (lokal) beschränkt. Das ergibt mittels der Einsteingleichungen (3), dass der Energie-Impuls-Tensor, etwa in Form einer Massendichte, unstetig aber beschränkt ist, was Physiker*innen naturgemäß überhaupt nicht stört! Z. B. tritt so eine Situation auf, wenn man einen Stern modelliert, denn an dessen Oberfläche springt die Massendichte von einem positiven Wert auf 0. Zusammenfassend bestand also ein dringender Bedarf an einer Erweiterung der Singularitätentheoreme für Metriken mit niedriger Regularität. Dem entgegen steht, dass die C^2 -Annahme für eine fast unüberschaubare Fülle von Argumenten im Maschinenraum der Lorentz-Geometrie einfach notwendig ist!

Tatsächlich konnte eine solche Erweiterung der Singularitätentheoreme für $C^{1,1}$ -Metriken und auch für nur stetig-differenzierbare (mit C^1 bezeichnete) Metriken in einer Serie von Publikationen unserer Wiener Arbeitsgruppe, siehe Abbildung 15, erarbeitet werden. Für eine Zusammenfassung siehe Steinbauer (2022). Dabei ist der grundlegende Ansatz, dass die *Metrik niedriger Regularität durch glatte Metriken approximiert* wird und dann viele der technischen Schritte für eine solche Folge von regularisierenden glatten Metriken durchgeführt werden. Diese Approximations-Idee wurde zwar schon in (Hawking/Ellis, 1973, Abschn. 8.2) vorgeschlagen und skizziert, aber erst eine an die Kausalität angepasste verfeinerte Konstruktion, die ebenfalls in Wien an der Fakultät für Physik in Chruściel/Grant (2012) gefunden wurde, verlieh der Methode richtig Flügel.

Um einen kleinen Eindruck von den neu entwickelten Methoden zu geben, bemerken wir, dass zuerst einmal die Voraussetzungen in den Theoremen direkt für die niedrig-reguläre Metrik formuliert werden müssen, was an sich schon einige Probleme verursacht. Dann müssen diese in Bedingungen in solche an die Approximationen übersetzt werden, die bedauernswerter Weise schwächer ausfallen als die ursprünglichen, die in den klassischen Theoremen verwendet werden. Daher müssen die klassischen Methoden erweitert werden, damit sie auch für die approximierenden glatten Metriken im neuen Kontext greifen. So muss z. B. das Fokussierungsargument vom Ende des vorigen Abschnitts entscheidend verallgemeinert werden. Dazu haben wir neue Vergleichs-Methoden entwickelt, die auch vom konkreten Kontext losgelöst bisher unbekannte Abschätzungen liefern. Damit kann schließlich darauf geschlossen werden,

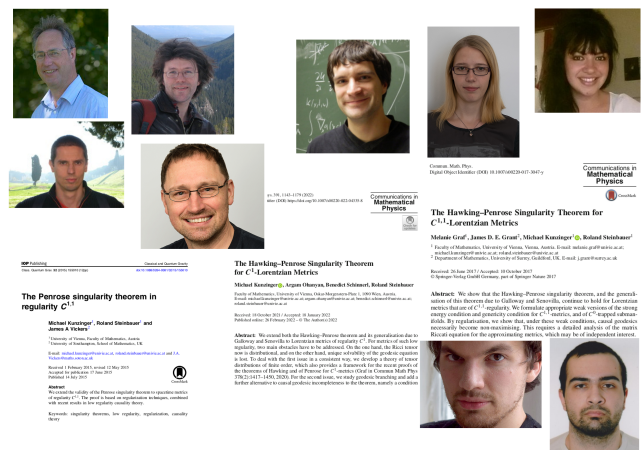


Abb. 15: Die Wiener Arbeitsgruppe²³ und einige ihrer Publikationen.

²² Lipschitz-Stetigkeit ist eine Verschärfung der (normalen) Stetigkeit und verlangt für eine Funktion f , dass für alle Punkte x und y die Abschätzung $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ gilt.

²³ Die Abbildung zeigt die Forscher*innen der Arbeitsgruppe an der Fakultät für Mathematik an der Universität Wien ergänzt um die britischen Kollegen (oben von links) James Vickers (Univ. Southampton) und James Grant (Univ. Surrey): Clemens Sämann (mittlerweile Univ. Oxford), Melanie Graf (mittlerweile Univ. Tübingen), Milena Stojković (mittlerweile Allianz Technology), Michael Kunzinger, Roland Steinbauer, Benedict Schinnerl, Argam Ohanyan (von links oben nach rechts unten).

dass die Geodäten der approximierenden Metriken fokale Punkte entwickeln. Nimmt man nun noch die ebenfalls neuen Erweiterungen der Kausalitätstheorie für niedrige Regularität²⁴ zur Hand, dann gelingt der Beweis, dass auch die Geodäten der approximierten niedrig-regulären Metrik aufhören, längste Kurven zu sein. Damit hat man den Beweis der Theoreme von Hawking und von Penrose für $C^{1,1}$ und C^1 -Metriken schon so gut wie in der Tasche. Aber beim allgemeineren Hawking-Penrose Theorem, das wir bisher nur kurz erwähnt haben, spießt es sich dann doch noch ganz gewaltig. Hier mussten wir eine neue, allerdings natürliche Bedingung zu den üblichen Voraussetzungen des Theorems hinzunehmen: *Kausale Geodäten dürfen sich nicht verzweigen*. Diese Bedingung ist für glatte (und auch für $C^{1,1}$ -) Metriken automatisch erfüllt, weil Geodäten ja die eindeutig lösbare Differentialgleichung (12) erfüllen. Für C^1 -Metriken geht aber genau diese Eindeutigkeit verloren und zu gegebenen Anfangsdaten — ein Punkt x und ein Vektor v in x — können durchaus mehrere Geodäten existieren, die im Punkt x in Richtung v starten (vgl. Abbildung 5), sich aber später verzweigen!

Wir schließen nun mit einer vereinfachten Formulierung des Hawking-Penrose Theorems für C^1 -Metriken (siehe (Kunzinger et al., 2022, Thm. 6.3)) und seiner Interpretation:

Theorem 4.5 *Erfüllt eine Raumzeit mit C^1 -Metrik folgende vier Bedingungen:*

- (1) *Es gibt eine gefangene Fläche oder eine dreidimensionale Fläche mit positiver Expansion.*
- (2) *Es gelten geeignete Energiebedingung.*
- (3) *Es gibt keine geschlossenen kausalen Kurven.*
- (4) *Kausale Geodäten verzweigen sich nicht.*

Dann ist sie singulär.

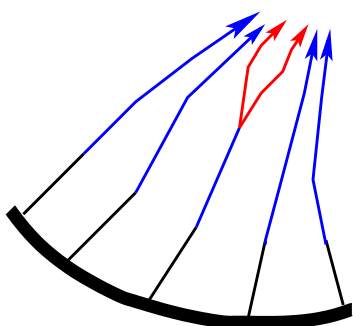


Abb. 16: Verzweigung einer kausalen Geodäte.

Die Anfangsbedingungen in (1) sind wie gehabt die Bedingungen (1) aus Theorem 4.2 bzw. 4.3 und auch Bedingung (2) ist ähnlich zu den respektiven Bedingungen in den klassischen Theoremen. Die globale Kausalitätsbedingung (3) ist viel allgemeiner als die früher verwendeten, was aber schon im klassischen Hawking-Penrose Theorem der Fall ist und einer seiner großen Vorteile im Vergleich zu den Theoremen 4.2 und 4.3. Schließlich ist (4) die Nichtverzweigungsbedingung, die folgenden neuen Aspekt für die Interpretation des Theorems eröffnet. Eine Verzweigung einer kausalen Geodäte entspricht anschaulich gesprochen der Situation, dass sich ein Beobachter oder ein Lichtstrahl plötzlich in zwei Beobachter oder Lichtstrahlen aufspaltet. So ein Phänomen ist physikalisch mindestens genauso unerwünscht, wie das plötzliche Ende von Beobachter oder Lichtstrahl, also jener Situation, die der Unvollständigkeit der entsprechenden Geodäte entspricht.

Insgesamt bedeutet es, dass unter den Voraussetzungen des Theorems nun zwei Alternativen möglich sind. Entweder tritt eine Singularität im früheren Sinn der Unvollständigkeit auf, der wir schon in Abbildung 13 begegnet sind, oder aber es tritt eine Verzweigung einer kausalen Geodäte auf, siehe Abbildung 16. Beide Alternativen sind physikalisch nicht akzeptabel, sodass wir also wiederum zurecht von einer Raumzeitsingularität sprechen können.

5. Schlussbemerkungen

Am ihrem Ende fassen wir nochmals unsere Reiseroute von den Grundlagen der ART über den Begriff der Raumzeitsingularitäten zu den Singularitätentheoremen zusammen. Zunächst haben wir erklärt, warum die Gravitation geometrisch ist. Aufgrund ihrer Universalität kann die Schwerkraft als Eigenschaft des umgebenden Raumes aufgefasst werden und die Bühne der ART ist eine vierdimensionale Raumzeit-Mannigfaltigkeit. Genauer bestimmen vorhandene Massen oder Energie die Geometrie der

²⁴ Diese beruht z.T. ebenfalls auf Chruściel/Grant (2012), wurde allerdings vom Italienischen Mathematiker Ettore Minguzzi nochmals entscheidend erweitert, siehe Minguzzi (2019).

Raumzeit, die in der Metrik kodiert ist — Masse und Energie krümmen gemäß der Einsteingleichungen (3) die Raumzeit.

Danach haben wir über die Diskussion einer wichtigen, sogenannten exakten Lösung der Einsteingleichungen, der Schwarzschildmetrik, sowohl den Begriff des schwarzen Lochs kennen gelernt, als auch die Phänomene Gravitationskollaps und Raumzeitsingularität. Schließlich haben wir die Situation der ART in der Mitte der 1960-er Jahre beschrieben, als sowohl theoretische als auch astrophysikalische Evidenz für die Existenz von stark kontrahierten Objekten vorlag, andererseits aber auch gravierende Zweifel an der Relevanz von Raumzeitsingularitäten angemeldet wurden — bis Roger Penrose mit seinem Theorem auf den Plan trat und bewies, dass Singularitäten ein generisches Phänomen in der ART sind.

Wir haben dieses Theorem, das das Entstehen einer Singularität im Gravitationskollaps vorhersagt, kennen gelernt, wie auch das Hawking-Theorem, das mit ähnlichen Argumenten die Existenz einer Anfangssingularität in expandierenden kosmologischen Modellen etabliert. Dann haben wir das gemeinsame Muster hinter den Theoremen herausgeschält und eine Beweisskizze gegeben, die die wesentlichen Argumentationslinien zusammenfasst. Insbesondere haben wir das Fokussierungsargument — einen Anfangsgrund der Vergleichsgeometrie — kennen gelernt, das aus geeigneten Anfangs- und Energiebedingungen auf das Vorhandensein fokaler Punkte schließen lässt. Diese (beinahe) Berührungspunkte benachbarter Geodäten bewirken, dass diese aufhören, die Distanz zu maximieren/minimieren — ein wesentlicher Effekt der Krümmung, wie wir schon auf der Erdkugel gesehen haben. Schließlich haben wir kurz über neue Resultate berichtet, die die Gültigkeit der Singularitätentheoreme auch für Raumzeitmetriken niedriger Regularität garantiert. Dabei haben wir sowohl den prinzipiellen Zugang zu diesen Resultaten erklärt, als auch eine aus ihnen abgeleitete neue Sichtweise auf Raumzeitsingularitäten skizziert.

Insgesamt haben wir mit den Singularitätentheoremen einen integralen Bestandteil der ART kennengelernt, der das Zusammenbrechen der Raumzeitgeometrie in extremen, aber physikalisch sinnvollen Situationen etabliert, also — etwas pathetisch ausgedrückt — die Mathematik für die Grenzen des Universums. Und wir haben gesehen, dass die Singularitätentheoreme mehr als 50 Jahre nach ihrer Entdeckung und nach ihrer Auszeichnung mit einem Nobelpreis noch immer ein aktuelles Forschungsgebiet an der Schnittstelle von Mathematik und Physik darstellen.

Bildnachweis

Die Bildquellen sind, wo immer verfügbar, angegeben. Alle anderen Bilder sind entweder vom Verfasser erstellt oder nach bestem Wissen der Public Domain entnommen.

Literatur

- Abbott, B. P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2016): Observation of gravitational waves from a binary black hole merger *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102, 16p.
- Baumgarte T., Shapiro, S. (2010): *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Bieri, L., Garfinkle, D., Yunes, N. (2017): Gravitational waves and their mathematics. *Notices Amer. Math. Soc.* **64**(7), 693–707.
- Carroll, S. (2022): *The Biggest Ideas in the Universe: Space, Time, and Motion*. Dutton (Random House), Boston.
- Carroll, S. (2022a): Secrets of Einstein's Equation. Mindscape Podcast. Online <https://www.preposterousuniverse.com/podcast/2022/09/19/211-solo-secrets-of-einsteins-equation/> (Zugriff 26.10.2022).
- Chruściel P., Grant, J. (2012): On Lorentzian causality with continuous metrics. *Classical Quantum Gravity* **29**(14), 145001, 32p.
- Corry, L., Renn, J., Stachel, J. (1997): Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute, *Science* **278**(14), 1270–1273.
- Einstein, A. (2009): *Über die Spezielle und die Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer, Berlin, Heidelberg, 24. Auflage.

- Fourès-Bruhat, Y. (1952): Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Math.* **88**, 141–225.
- Griffiths J., Podolský, J. (2009): *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hawking S., Penrose, R. (1970): The singularities of gravitational collapse and cosmology. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **314**, 529–548.
- Hawking, S., Ellis, G. (1973): *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press, London, New York.
- Kersting, M., Blair, D. (2012): *Teaching Einsteinian Physics in Schools: An Essential Guide for Teachers in Training and Practice*. Routledge, London.
- Kunzinger, M., Steinbauer, R. (2021): *Riemannian Geometry*. Lecture notes. University of Vienna. Online <http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/skripten/rg.pdf> (Zugriff 11.11.2022).
- Kunzinger, M., Ohanyan, A., Schinnerl, B., Steinbauer, R. (2022): The Hawking-Penrose singularity theorem for C^1 -Lorentzian metrics. *Comm. Math. Phys.*, **391**, 1143–1179.
- Landsman, K. (2021): Singularities, black holes, and cosmic censorship: A tribute to Roger Penrose. *Found. Phys.* **51**(2), 1–38.
- Misner, C., Thorne, K., Wheeler, J. (1973): *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco.
- Minguzzi, E. (2019): Causality theory for closed cone structures with applications. *Rev. Math. Phys.*, **310**(5), 1930001, 139p.
- NASA Science (1971): The Apollo 15 Hammer-Feather Drop. Online <https://moon.nasa.gov/resources/331/the-apollo-15-hammer-feather-drop/> (Zugriff 26.10.2022).
- Natario, J. (2011): *General Relativity without Calculus: A Concise Introduction to the Geometry of Relativity*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- University of Oxford Podcasts (2014): The Secrets of Mathematics. Extra Time: Professor Sir Roger Penrose in conversation with Andrew Hodges - part one. Online <https://podcasts.ox.ac.uk/extra-time-professor-sir-roger-penrose-conversation-andrew-hodges-part-one> (Zugriff 26.10.2022).
- Penrose, R. (1965): Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.* **14**, 57–59.
- Ringström H. (2015): Origins and development of the Cauchy problem in general relativity. *Classical Quantum Gravity*, **32**(12), 124003, 37p.
- Senovilla, J., Garfinkle, D. (2015): The 1965 Penrose singularity theorem, *Classical Quantum Gravity* **32**(12), 124008, 45pp.
- Senovilla, J. (1998): Singularity theorems and their consequences. *Gen. Relativity Gravitation* **30**(5), 701–848.
- Senovilla, J. (2012): Singularity theorems in General Relativity: Achievements and open questions. In Lehner, C., Renn, J., Schemmel M. (Hrsg.) *Einstein and the Changing Worldviews of Physics*, 305–315. Birkhäuser, New York.
- Steinbauer, R. (2022): The singularity theorems of general relativity and their low regularity extensions. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* Online first. <https://doi.org/10.1365/s13291-022-00263-7>

Anschrift des Verfassers

Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik
 Universität Wien
 Oskar-Morgenstern-Platz 1
 A – 1090 Wien
 Österreich

roland.steinbauer@univie.ac.at